$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

I tre personaggi della matematica

Prof.ssa Sandra Gaudenzi

30 aprile 2012

Numeri algebrici e trascendenti

Un numero *algebrico* è un qualsiasi numero *x*, reale o complesso, che soddisfi un'equazione algebrica della forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \qquad\qquad n \geq 1, \quad a_n \neq 0$$

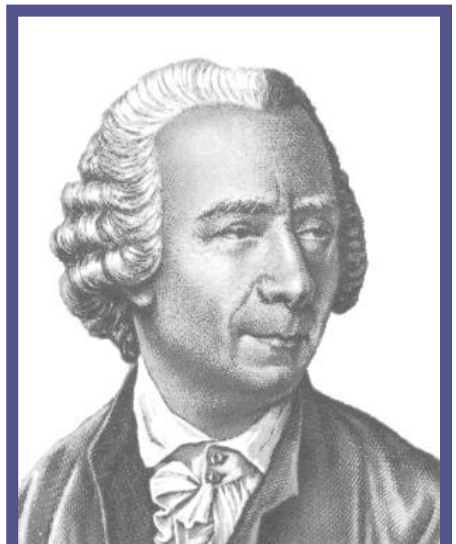
dove a_k sono numeri interi.

Il concetto di numero algebrico è una naturale generalizzazione del concetto di numero razionale (caso in cui $n=1$)

Non tutti i numeri reali sono algebrici

Cantor – 1874 dimostra la *numerabilità* di tutti i numeri algebrici e poiché l'insieme R non è numerabile devono esistere dei numeri reali che non sono algebrici, tale insieme di numeri *trascendenti* non è numerabile

Trascendenti perché come disse Eulero "trascendono il potere dei metodi algebrici"



Dimostrazione

Ad ogni equazione del tipo

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \qquad\qquad n \geq 1, \quad a_n \neq 0$$

si fa corrispondere una "altezza" definita come il numero intero positivo

$$h = |a_n| + |a_{n-1}| + ... + |a_0| + n$$

per ogni *h* esiste un numero *finito* di equazioni di altezza *h* e ciascuna di queste può avere *al massimo n* radici distinte [...]

Problema dell'interesse composto

C capitale iniziale

$x>0$ tasso di interesse annuo

dopo un anno il montante $C+xC=C(1+x)$

Se la capitalizzazione avviene ogni sei mesi

dopo un anno $C(1+x/2)^2$

Se la capitalizzazione avviene ogni quadrimestre
dopo un anno $C(1+x/3)^3$

Se la capitalizzazione avviene ogni giorno
dopo un anno $C(1+x/365)^{365}$

Problema dell'interesse composto

C capitale iniziale=1.000.000 euro

numero di capitalizzazioni	capitale finale	
1	2000000	annuale
2	2250000	semestrale
3	2370370	quadrimestrale
4	2441406	trimestrale
6	2521626	bimestrale
12	2613035	mensile
365	2714567	giornaliera
8760	2718127	oraria
525600	**2718279**	al minuto
31536000	**2718282**	al secondo

Problema dell'interesse composto

- Se la capitalizzazione avvenisse con frequenza sempre maggiore ….. ad ogni istante?

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} C\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \qquad [\ldots]$$

Se supponiamo di aver dimostrato che

$$f(1) = \lim_{h \longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}$$

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = f(1)^{x} \qquad x > 0$$

Definizione di e

Mostriamo che $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ esiste ed è finito

Consideriamo gli *n*+*1* numeri

$$1, \left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots\ldots\ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Calcoliamo le loro medie geometrica e aritmetica

$$G = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \qquad A = \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

Definizione di e

La disuguaglianza fra le medie G<=A, elevandone ambo i membri alla n+1 fornisce quindi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Ovvero la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ è crescente

Da questo ne segue che il limite esiste (finito o infinito)

Definizione di e

Introduciamo $s_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$ crescente e dimostriamo superiormente limitata con $s_n < 3 \quad \forall n$ [...]

Dimostriamo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq s_n$ ricorrendo allo sviluppo del binomio [...]

Pertanto essendo $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ crescente e superiormente limitata

definiamo $e = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Definizione di funzione esponenziale data da Eulero nel 1748 nella *Introductio in analysin infinitorum*

Definizione di e

La sua prima attestazione è in un breve trattato, *Meditatio in Experimenta explosione tormentorum nuper istituta* (Riflessione su esperimenti effettuati di recente sullo sparo con cannoni), scritto da Eulero verso la fine del 1727 o l'inizio del 1728 (quando aveva 21 anni)

secundis sit porro altitudo quaesita ad quam corpus ascendit x. Scribatur pro numero cujus logarithmus est unitas, e, qui est 2,7182817... cujus logarithmus secundum Vlacq. est 0,4342944. Indicat porro N numerum

(...) Si scriva, per il numero il cui logaritmo è l'unità, e, che è 2,7182817... il cui logaritmo secondo Vlacq (cioè in base 10) è 0,4342944 (...)

thmos exprimi poteſt. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828182845 9 &c. conſtanter litteram e, quæ ergo denotabit baſin Logarithmorum naturalium ſeu hyperbolicorum, cui reſpondet valor litteræ $k = 1$; ſive hæc littera e quoque exprimet ſummam hujus Seriei $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ &c. in infinitum.

Eulero 1748 nella *Introductio in analysin infinitorum*

Ma poniamo per brevità per questo numero 2,718281828459 &c. costantemente la lettera **e**, che indicherà la base dei logaritmi naturali o iperbolici, cui corrisponde il valore della lettera $k = 1$ o, piuttosto, questa lettera **e** esprime anche la somma della serie

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+ \text{\&c. all'infinito.}$$

Definizione di e

Dal testo storico

$$e = \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$$

Per quanto visto prima

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n$$

e passando al limite

$$e \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n$$

È quindi sufficiente dimostrare che

$$e \geq \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n$$

[…]

Irrazionalità di e *(Eulero 1737)*

Per assurdo $e = \frac{p}{q}$

con p, q interi e q almeno uguale a 2.

Moltiplicando i membri per q!

$$e \cdot q! = p \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots \cdot (q-1) =$$

$$[q! + q! + 3 \cdot 4 \cdot \ldots q + 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots \cdot q + \ldots. + (q-1) \cdot q + q + 1] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \ldots$$

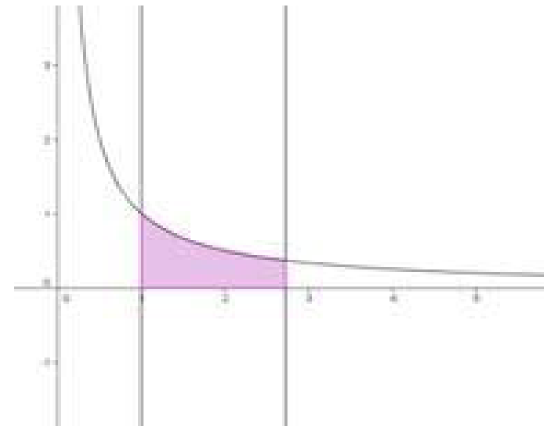
Il primo membro è un intero, a destra il termine dentro le quadre è un intero, ma il resto è un numero positivo minore di ½ […] quindi non è intero.

Nel 1873 Hermite dimostra la trascendenza di e

Ulteriori proprietà

- Funzione inversa del logaritmo, $\ln e=1$

- Area sottesa dall'iperbole



- Tra le permutazioni di n elementi, le permutazioni prive di punti fissi *derangement* sono

$$d_n = \left[\frac{n!}{e} \right]$$

Il numero *i*

La sua prima attestazione è in uno scritto del 1777, che Eulero indirizzò all'Accademia delle Scienze di S. Pietroburgo e che fu pubblicato postumo nel 1794 in uno dei volumi delle *Institutionum calculi integralis*[1]

Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$.

Poiché non mi si apre altra via che quella di procedere attraverso gli immaginari, nel seguito indicherò la formula $\sqrt{-1}$ con la lettera i, così che sia $ii = -1$ e $1/i = -i$.

Il simbolo i è effettivamente di Eulero ma l'idea di servirsi di "numeri immaginari" in opposizione a numeri reali, per lavorare con radici quadrate di numeri negativi nella risoluzione di equazioni è precedente e all'inizio della storia sono implicati diversi matematici italiani del cinquecento: Scipione dal Ferro, Niccolò Fontana detto il Tartaglia, Girolamo Cardano e Raffaele Bombelli.

$$e^{i\pi}+1=0$$

Nel contributo del mese di febbraio 2007 (i suoi articoli appaiono ogni mese a partire dal novembre 2003) dal titolo *Euler's Greatest Hits*, Sandifer osserva – a proposito della formula $e^{i\pi}=-1$ – che in questa forma Eulero non l'ha mai scritta, ma che nella prima lettera (del 13 ottobre 1729) a Christian Goldbach[a)], parlando di una certa serie (la citazione è in fondo alla pagina 5) si è espresso così:

> possim determinare. Terminus autem exponentis $\frac{1}{2}$ aequalis inventus est huic $\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{-1}\,.\,l-1)}$, seu quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo, cujus diameter $=1$. Ex

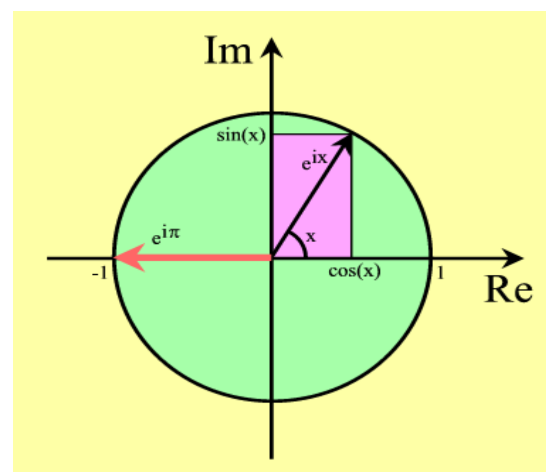
> (...) Ma il termine di esponente uguale a $\frac{1}{2}$ è uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{-1}\,.\,l-1}$ oppure, ciò che fa lo stesso, al lato del quadrato uguale al cerchio di diametro 1. (...)

Ora, il cerchio di diametro 1 ha area $\frac{\pi}{4}$, quindi il lato del quadrato equivalente misura $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Dalla relazione $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{-1}\,.\,l-1}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ segue $\sqrt{-1}\,.\,l-1=\pi$, cioè, usando le notazioni attuali $i\,.\ln(-1)=\pi$, da cui si ricava $\ln(-1)=\frac{\pi}{i}=-i\pi$, $e^{-i\pi}=\frac{1}{e^{i\pi}}=-1$ e infine $e^{i\pi}=-1$.

$$e^{i\pi}+1=0$$

Secondo il prof. Sandifer, è probabile che Eulero abbia imparato questa formula da Johann Bernoulli; egli fa anche osservare che la formula generale $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ era nota al matematico inglese Roger Cotes (1682-1716) prima che Eulero comparisse sulla scena. Carl Boyer nella sua *Storia della matematica* (Oscar Studio Mondatori, Milano, 1980) scrive a pag. 491: "Sembra che Cotes sia stato fra i primi matematici ad anticipare la relazione $\ln(\cos\theta+i\sin\theta)=i\theta$, di cui egli aveva presentato una espressione equivalente in un articolo pubblicato sulle *Philosophical Transactions* del 1714 e ristampato nella *Harmonia mensurarum*. Questo teorema viene solitamente attribuito ad Eulero, che per primo lo espresse nella moderna forma esponenziale."

Siamo ancora lontani dal 1806 (Argand) e 1831 (Gauss) grazie all'opera dei quali si rappresentano i numeri complessi nel piano z=a+ib



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

E ora chiudiamo "la quadratura del cerchio"

Lindemann (1882) mostra che e^x è trascendente anche se x è solo algebrico (diverso da zero).

Si ha quindi che $e^{i\pi}$ non è trascendente, visto che vale -1, si conclude quindi che l'esponente deve allora essere non algebrico, cioè trascendente.

Ma l'unità immaginaria è algebrica e quindi deve essere necessariamente π ad essere trascendente.

Settimo problema di Hilbert

"Se vogliamo immaginarci lo sviluppo presumibile della conoscenza matematica nel prossimo futuro, dobbiamo far passare davanti alla nostra mente le questioni aperte e dobbiamo considerare i problemi che sono posti dalla scienza attuale e la cui soluzione attendiamo dal futuro. Questi giorni, che stanno a cavallo tra due secoli, mi sembrano ben adatti per una rassegna dei problemi ...." Così David Hilbert aprì la sua conferenza al secondo congresso internazionale dei matematici a Parigi. Era l' 8 agosto 1900.

Un numero del tipo a^b con a e b algebrici, è algebrico o trascendente?
Hilbert fece l'esempio di $2^{\sqrt{2}}$

Problema ancora aperto
Non si sa nulla di e^e, π^e, π^π, $e+\pi$, $e-\pi$

Il problema fu risolto nel 1934 indipendentemente da A. Gelfond e Th. Schneider sulla base di risultati ottenuti da Gelfond nel 1929.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Concludiamo come B. Peirce (1809-1880)

che al termine di una sua lezione sulla formula di Eulero disse

Signori, posso dirlo con certezza, è assolutamente paradossale: non possiamo capirla, e non sappiamo cosa significhi; ma l'abbiamo appena dimostrata e quindi sappiamo che deve essere vera.